

# Chapitre 1 : Propagation d'un signal

## 1. Ondes et signaux physiques

### 1.1. Définitions

Une onde est un phénomène pour lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans mouvement de matière en moyenne. On appelle signal une grandeur physique, nulle dans l'état de repos, apparaissant avec la perturbation et donc porteuse de l'information associée à l'onde.

### 1.2. Exemples

Type de signal	Grandeur physique	Fréquences (ordre de grandeur)
Signal acoustique	surpression ou vitesse de vibration	Bande audio ( $[20 \text{ Hz} ; 20 \text{ kHz}]$ )
Signal électrique	tension, intensité du courant	au labo ( $[10 \text{ Hz} ; 10^7 \text{ Hz}]$ ) secteur $50 \text{ Hz}$
Signal électromagnétique	champs électrique et magnétique	radiophonie $\sim 100 \text{ MHz}$ Téléphonie $\sim 10^9 \text{ Hz}$ ( $\text{GHz}$ ) Wifi ( $2,4 \text{ GHz}$ ou $5 \text{ GHz}$ )

### 1.3. Théorème de Fourier

Le plus souvent, les signaux ne sont pas des fonctions périodiques. Pourtant, on s'intéressera principalement à ces signaux et plus particulièrement au cas des signaux sinusoïdaux. Les raisons de ce choix sont les suivantes :

- dans la pratique, on utilise souvent des signaux périodiques (émetteur alimenté par un GBF par exemple) ; il est donc nécessaire de pouvoir confronter les résultats expérimentaux à des prévisions théoriques
- il est possible de transporter une information à l'aide d'un signal périodique dont l'une des caractéristiques (amplitude, fréquence, phase) varie lentement dans le temps ; c'est le principe de la modulation vue en Terminale
- tout signal peut s'écrire comme une somme infinie de signaux sinusoïdaux ce qui confère à ceux-ci un statut privilégié ; c'est le théorème de Fourier (19ème siècle)

Le théorème de Fourier s'énonce de la manière suivante :

- ✓ tout signal périodique  $s(t)$ , de fréquence  $f$ , peut s'écrire comme la somme d'une infinité de signaux sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples entiers de  $f$ .

$$s(t) = S_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} S_{m_n} \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

où les  $S_{m_n}$  et  $\varphi_n$  sont des constantes.

$S_0$  est la valeur moyenne de  $s(t)$ . Le terme  $S_m \cos(2\pi nft + \varphi_n)$  est appelé harmonique de rang  $n$ , de fréquence  $nf$ . L'harmonique de rang 1, ayant la même fréquence que  $s(t)$  est appelé fondamental.

On parle de décomposition en série de Fourier du signal  $s(t)$ .

✓ dans le cas d'un signal non périodique, on peut alors écrire

$$s(t) = \int_0^{\infty} S_m(f) \cos[2\pi ft + \varphi(f)] df$$

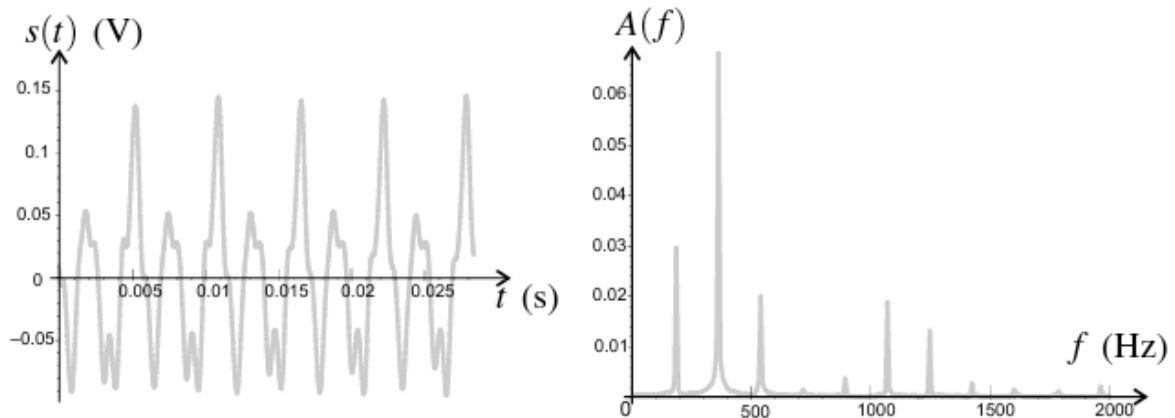
où  $S_m(f)$  et  $\varphi(f)$  sont des fonctions de la fréquence.

### 1.4. Spectre d'un signal périodique

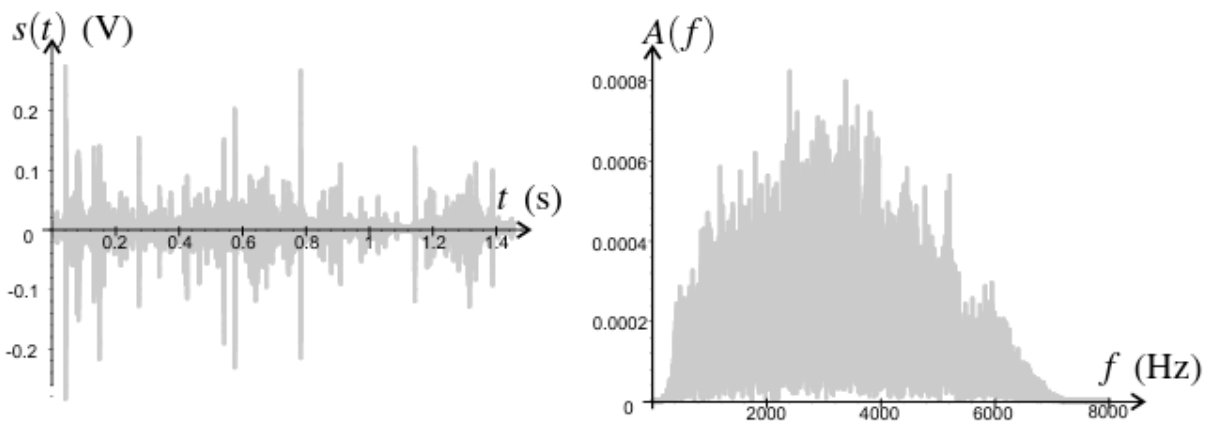
La courbe représentant  $S_m$  en fonction de  $f$  est appelée spectre d'amplitude de  $s(t)$ , celle donnant  $\varphi$  en fonction de  $f$ , spectre de phase de  $s(t)$  (moins utilisé). Dans le cas d'un signal périodique, on a un spectre discret. Dans le cas d'un signal non périodique, on a un spectre continu.

Exemples :

✓ son émis par une guitare jouant un Fa3 (signal périodique)



✓ son émis par une feuille de papier que l'on froisse



Remarques :

- le spectre d'un signal périodique ne devrait contenir que des points mais, pour plus de lisibilité, on représente des lignes verticales
- dans le cas de la note émise par une guitare, le son n'est pas parfaitement périodique (légère atténuation dans le temps) ce qui explique l'élargissement des « pieds ». Par ailleurs, les logiciels permettant l'obtention du spectre effectuant des calculs approchés (modélisation), il est très difficile d'obtenir un spectre expérimental identique au spectre théorique, même pour un signal parfaitement périodique.

## 2. Quelques rappels sur les signaux sinusoïdaux

On appelle signal sinusoïdal toute grandeur périodique  $s(t)$  pouvant être mise sous la forme :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec :

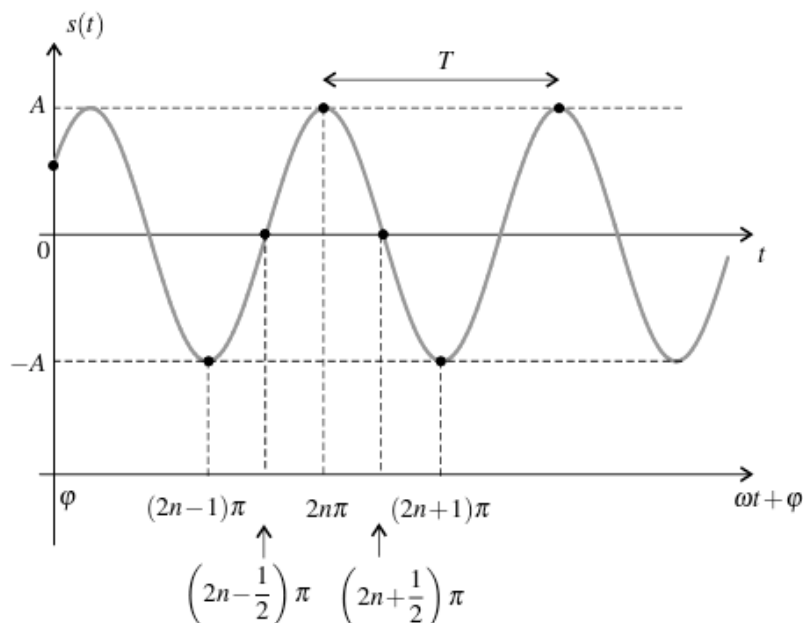
- $S_m$  : amplitude du signal ; elle s'exprime dans la même unité que celle de la grandeur physique associée à  $s(t)$  (par exemple en  $V$  pour une tension électrique, en  $m.s^{-1}$  pour une vitesse...)
- $\omega$  : pulsation du signal  $s(t)$  ; elle s'exprime en  $rad.s^{-1}$
- $\varphi$  : déphasage par rapport à une référence des phases, aussi appelé phase à l'origine ou phase initiale ; il s'exprime en  $rad$
- l'argument de la fonction trigonométrique,  $\theta(t) = \omega t + \varphi$ , est appelé phase instantanée du signal ; elle devra toujours être exprimée en  $rad$

Grâce aux mathématiques, on sait qu'on peut également écrire que :

$$s(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

avec  $A = S_m \cos(\varphi)$  et  $B = -S_m \sin(\varphi)$ .

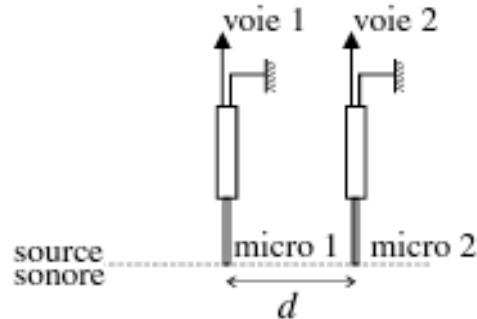
Cette forme est moins utilisée en physique car elle ne fait pas apparaître de manière évidente l'amplitude et le déphasage de  $s(t)$ . Elle pourra toutefois être utilisée dans certaines résolutions de problème pour faciliter les calculs.



### 3. Phénomène de propagation

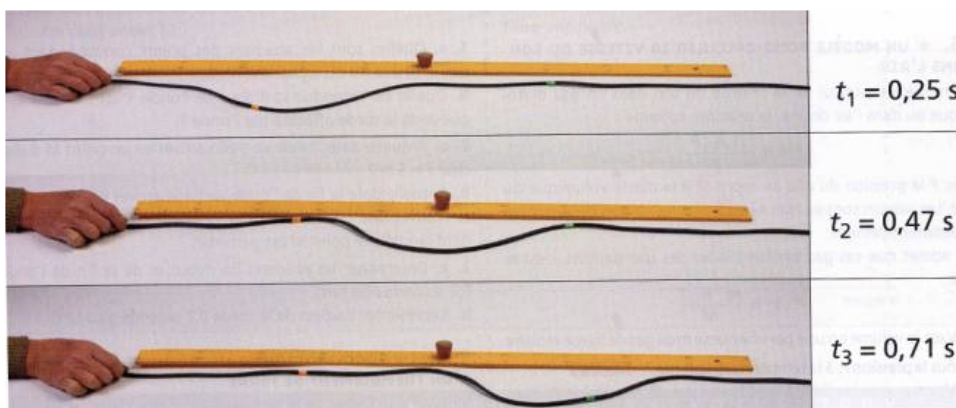
#### 3.1. Mises en évidence expérimentale

- Première expérience (**à faire en cours**) : on considère deux micros distants d'une distance  $d$  reliés respectivement aux voies 1 et 2 d'un oscilloscope numérique. La source sonore correspond ici à un claquement de doigts.



On observe que le signal donné par le second micro reproduit celui du premier micro, avec une atténuation et un retard  $\tau$ .

- Deuxième expérience : une corde est placée sur une table le long d'une règle de  $1\text{ m}$ . A  $t=0$ , un opérateur crée une perturbation à une extrémité de la corde. A l'aide d'un appareil, on prend en mode rafale trois photos.



On voit nettement que la déformation progresse le long de la règle en s'éloignant de l'extrémité où elle a pris naissance.

- Troisième expérience : vidéo

#### 3.2. Interprétation

Dans chacun des cas précédents, le signal physique (surpression acoustique, déformation de la corde ou du ressort) se transmet de proche en proche dans la matière (air, corde, ressort) et peut être observé à distance de l'endroit où il prend naissance. Ceci se produit sans déplacement de matière entre le point d'origine et le point d'observation.

La vitesse de déplacement du signal est appelée vitesse de propagation ou célérité et sera notée par la suite  $c$ .

On peut associer au phénomène ondulatoire une grandeur  $s$  dépendant du temps  $t$  et d'une variable d'espace que nous noterons  $x$ . On aura alors :

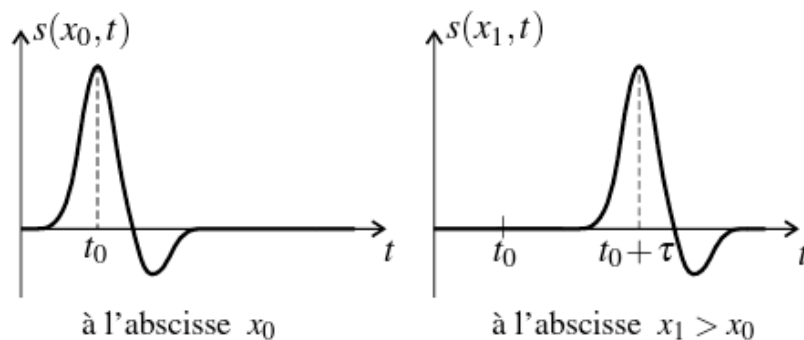
- première expérience :  $s(x,t)$  correspond à la surpression acoustique (écart de pression par rapport à la pression atmosphérique)
- deuxième expérience :  $s(x,t)$  correspond à l'écart du point d'abscisse  $x$  par rapport à la règle
- troisième expérience :  $s(x,t)$  correspond à l'écartement de deux spires consécutives du ressort

#### 4. Onde progressive unidimensionnelle

Soit une onde progressive se propageant suivant une direction notée  $(Ox)$ , dans le sens des  $x$  croissants à la célérité  $c$ . Soit  $s(x,t)$  la grandeur associée.

##### 4.1. Première expression

On considère tout d'abord les représentations graphiques de  $s(x,t)$  en deux points distincts de l'espace d'abscisse  $x_0$  et  $x_1$ . Il s'agit des évolutions temporelles observées par deux dispositifs de mesure placés en ces deux points.



On peut écrire que :

$$s(x_1, t) = s(x_0, t - \tau)$$

$\tau$  correspond au temps mis par l'onde pour se propager de  $x_0$  à  $x_1$  soit :

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$$

Il est donc possible d'écrire :

$$s(x_1, t) = s\left(x_0, t - \frac{(x_1 - x_0)}{c}\right)$$

En prenant  $x_0 = 0$  et  $x_1 = x$ , on a :

$$s(x, t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

On a alors une fonction d'une seule variable  $t - \frac{x}{c}$  ce qui permet d'écrire par la suite :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

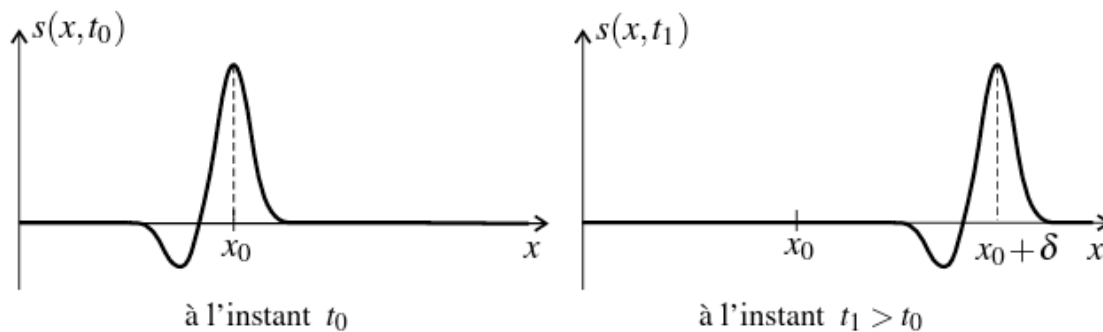
Si on considère une onde se propageant maintenant suivant les  $x$  décroissants, il suffit de considérer un axe  $(Ox')$  parallèle à  $(Ox)$  mais orienté en sens inverse ce qui implique  $x' = -x$ .

On aurait alors :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x'}{c}\right) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

#### 4.2. Deuxième expression

On considère maintenant les représentations graphiques de  $s(x,t)$  pour deux instants distincts  $t_0$  et  $t_1$ . Il s'agit des représentations spatiales de l'onde (photos) prises à deux instants différents.



On peut écrire que :

$$s(x,t_1) = s(x - \delta, t_0)$$

$\delta$  correspond à la distance parcourue par l'onde entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  :

$$\delta = c \times (t_1 - t_0)$$

Il est donc possible d'écrire :

$$s(x,t_1) = s(x - c(t_1 - t_0), t_0)$$

En prenant  $t_0 = 0$  et  $t_1 = t$ , on a :

$$s(x,t) = s(x - ct, 0)$$

On a alors une fonction d'une seule variable  $x - ct$  ce qui permet d'écrire par la suite :

$$s(x,t) = F(x - ct)$$

De la même manière qu'au paragraphe précédent, on montre que, pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, on a :

$$s(x,t) = F(x' - ct) = G(x + ct)$$

#### 4.3. Equivalence des deux expressions

Considérons une onde progressive se propageant suivant les  $x$  croissants. On a

$$s(x,t) = F(x - ct) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Supposons que  $f$  soit connue, alors on obtient  $F$  en remarquant qu'à l'instant initial :

$$s(x,0) = F(x) = f\left(-\frac{x}{c}\right)$$

De même, si  $F$  est connue, on obtient alors  $f$  en remarquant qu'en se plaçant à l'origine :

$$s(0,t) = f(t) = F(-ct)$$

On ferait de même pour une onde se propageant suivant les  $x$  décroissants.

## 5. Onde progressive sinusoïdale

Nous avons vu précédemment que tout signal peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux (théorème de Fourier). Il paraît donc logique que ceux-ci fassent l'objet d'une étude approfondie.

### 5.1. Définition

On dit d'une onde qu'elle est sinusoïdale (ou harmonique) si et seulement si le signal mesuré en tout point d'abscisse  $x$  est une fonction sinusoïdale du temps. On peut alors écrire :

$$s(x,t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$$

où  $A(x)$  est l'amplitude et  $\varphi(x)$  la phase initiale de l'onde au point d'abscisse  $x$ .

S'il s'agit d'une onde progressive sinusoïdale se propageant sans atténuation dans le sens des croissants, on a pour expression :

$$s(x,t) = A_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right]$$

où  $A_0$  est l'amplitude et  $\varphi_0$  la phase initiale de l'onde à l'origine  $O$  de l'axe  $(Ox)$ .

Remarque : l'amplitude mesurée sera la même en tout point puisqu'il n'y a pas d'atténuation.

### 5.2. Double périodicité spatiale et temporelle

Le signal associé à une onde progressive sinusoïdale se propageant suivant les  $x$  croissants peut se mettre sous la forme

$$s(x,t) = A_0 \cos[\omega t - kx + \varphi_0]$$

en posant

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$k$  étant appelé vecteur d'onde et s'exprime en  $rad.m^{-1}$ .

Remarque : bien qu'il ne s'agisse pas d'un vecteur, on donne à  $k$  le nom de vecteur d'onde car pour une onde se propageant dans l'espace dans une direction quelconque, on aurait pour expression

$$s(M, t) = A_0 \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \overline{OM} + \varphi_0]$$

$\overline{OM}$  étant le vecteur position et  $\vec{k}$  un vecteur de module  $k$  et dirigé suivant le direction de propagation de l'onde.

Pour le cas considéré ici, dans le repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on a :

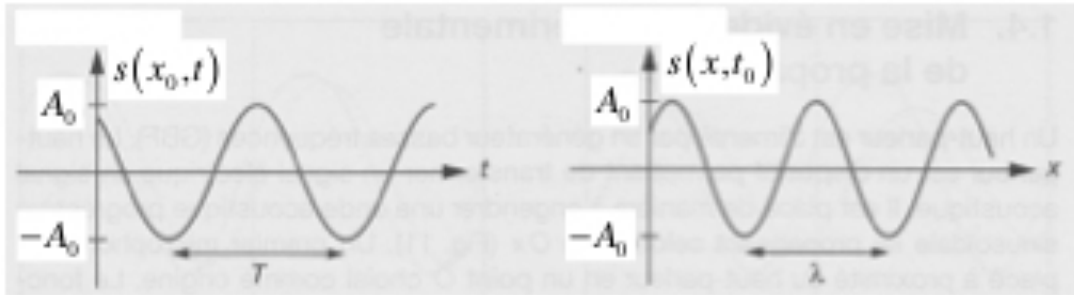
$$\overline{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{k} = k\vec{e}_x$$

On retrouve bien l'expression ci-dessus.

L'expression vecteur d'onde est donc un abus de langage ; on devrait en toute rigueur dire ici module (norme) du vecteur d'onde.

En examinant l'évolution du signal en fonction de  $x$  et  $t$ , on constate que :



- ✓ pour  $x = x_0$  fixé, la vibration  $s(x_0, t)$  varie de manière sinusoïdale au cours du temps ; elle est donc temporellement périodique de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- ✓ pour  $t = t_0$  fixé, la vibration  $s(x, t_0)$  varie de manière sinusoïdale dans l'espace ; elle est donc spatialement périodique de période

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

La période spatiale  $\lambda$  est homogène à une longueur et sera ainsi nommée longueur d'onde.



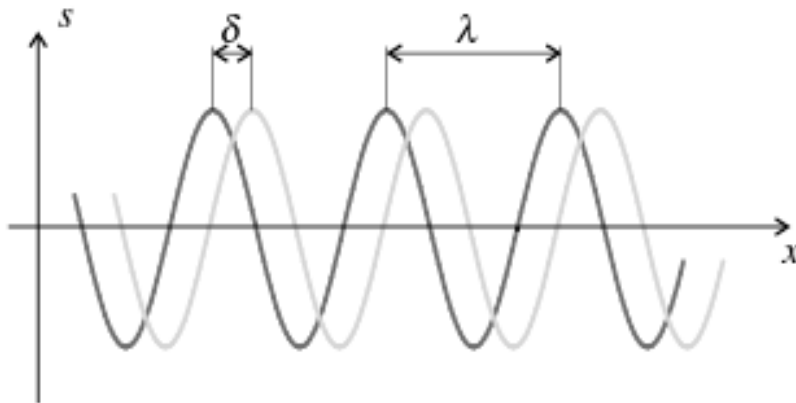
Des trois relations

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} ; k = \frac{\omega}{c} ; T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On déduit la relation liant les deux périodes spatiales et temporelles

$$\boxed{\lambda = c \times T}$$

Il est possible de retrouver cette relation en raisonnant de la manière suivante : entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ), le signal s'est déplacé dans le sens des  $x$  croissants d'une distance  $\delta = c \times (t_1 - t_0)$ .

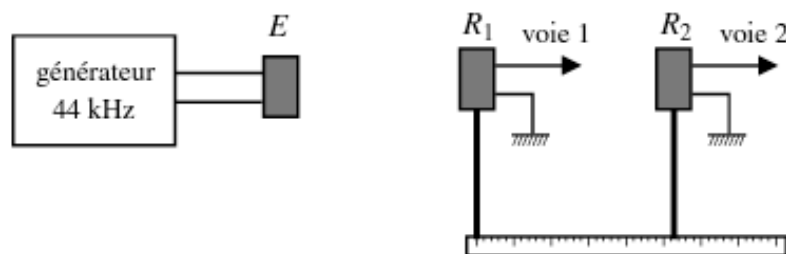


Comme en tout point de l'axe de propagation, le signal est temporellement périodique de période  $T$ , pour  $t_1 = t_0 + T$ , les courbes du signal aux instants  $t_0$  et  $t_1$  se superposent ; elles sont donc décalées d'une période spatiale  $\lambda$ . On en déduit la relation

$$\lambda = c \times T$$

### 5.3. Mesure de la célérité d'une onde (*expérience de cours*)

On place un émetteur à ultrasons alimenté par un GBF produisant une onde sinusoïdale de fréquence  $f = 44 \text{ kHz}$  face à deux récepteurs  $R_1$  et  $R_2$  reliés aux deux voies d'un oscilloscope. Les courbes obtenues correspondent à l'évolution temporelle du signal aux emplacements occupés par les deux récepteurs.



A l'aide d'un des deux signaux, on peut mesurer la période temporelle  $T$  et vérifier que

$$T = \frac{1}{f}$$

On positionne les deux récepteurs afin que les deux signaux soient superposés ; on dit qu'ils sont en phase. On translate l'un des deux récepteurs d'une distance  $D$  en comptant le nombre de passage  $N$  par deux signaux en phase. On a alors :

$$\lambda = \frac{D}{N}$$

On peut ainsi calculer la célérité de l'onde  $c = \frac{\lambda}{T}$

## 6. Milieux dispersifs ou non-dispersifs

### 6.1. Vitesse de phase d'une onde

Une onde peut être une perturbation plus complexe qu'une simple grandeur sinusoïdale. En s'appuyant sur la relation obtenue entre la pulsation  $\omega$ , le vecteur d'onde  $k$  et la célérité de l'onde dans le cas sinusoïdal, on définit la vitesse de phase d'une onde quelconque comme la vitesse à laquelle celle-ci se propage et par la relation :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k}$$

Remarque :

- La vitesse de phase d'une onde peut s'interpréter comme la vitesse de propagation d'un point particulier de l'onde (par exemple une crête)
- Lorsque l'onde est une onde progressive sinusoïdale, on retrouve alors que la vitesse de phase correspond à la célérité de l'onde
- Lorsque l'onde s'écrit comme une superposition d'onde sinusoïdale, la vitesse de phase correspond à une moyenne pondérée des vitesses de phase de chaque composante sinusoïdale par leur vecteur d'onde. Par exemple, dans le cas de la superposition de deux ondes sinusoïdales de pulsation  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , de vecteur d'onde  $k_1$  et  $k_2$ , on aurait :

$$v_{\varphi} = \frac{k_1 v_{\varphi 1} + k_2 v_{\varphi 2}}{k_2 + k_1} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{k_2 + k_1}$$

- Dans le cas d'une onde comportant plusieurs composantes, on peut également définir une vitesse de groupe qui s'interprète quant à elle comme la vitesse de propagation de l'enveloppe de l'onde et donc l'énergie associée. On peut la calculer par la formule :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Vidéo : exemple d'une onde constituée de la superposition de deux ondes sinusoïdales de pulsations voisines et d'amplitude unité.

### 6.2. Phénomène de dispersion

La dispersion est le phénomène affectant une onde dans un milieu dispersif, c'est-à-dire dans lequel les différents fréquences constituant l'onde ne se propage pas à la même vitesse.

Un milieu est dit non-dispersif si et seulement si la vitesse de phase de l'onde dans le milieu ne dépend pas de  $k$  (et donc de la fréquence). Dans ce cas, la pulsation  $\omega$  est nécessairement proportionnelle à  $k$  ce qui implique que  $v_g = v_{\varphi}$ .

Un milieu est dit dispersif dans le cas où ces deux vitesses ne sont plus égales et dépendent donc de  $k$  (et donc de la fréquence).

### 6.3.Exemples

Milieux non-dispersifs :

- L'air pour les ondes sonores : si l'air était un milieu dispersif alors les hautes fréquences et les basses fréquences n'arriveraient pas au même instant à nos oreilles ; le son serait alors décomposé en fonction de la fréquence
- Le vide pour les ondes électromagnétiques

Milieux dispersifs :

- L'eau pour les ondes mécaniques : soit un bateau en mouvement sur l'eau provoquant des perturbations comportant plusieurs ondes sinusoïdales de fréquences différentes ; un observateur sur le rivage verra arriver d'abord des vagues très espacées (grandes longueurs d'onde) puis des vagues moins espacées. L'eau sépare les différentes ondes en fonction de leurs fréquences.
- Le verre pour les ondes lumineuses : on peut décomposer la lumière blanche à l'aide d'un prisme